Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1

а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

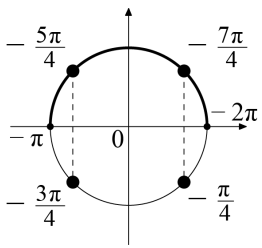
Решение.
а) Выделим полный квадрат:

$$\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 = 0.$$

Преобразуем уравнение дальше:

$$2\cos^2 x = 1;\quad \cos^2 x = \frac{1}{2};\quad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};\quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$. Получим $x = -\frac{7\pi}{4}$, $x = -\frac{5\pi}{4}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

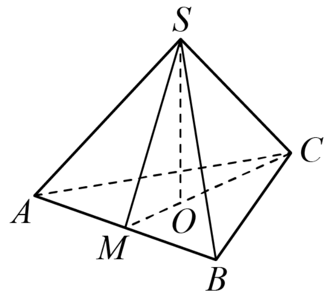
С2

Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

Решение.
Пусть $SO = 5x$ и $SM = 7x$. Тогда $OM = x\sqrt{49-25} = x\sqrt{24} = 2x\sqrt{6}$, а $OC = 2\cdot OM = 4x\sqrt{6}$. Из треугольника COS находим

$$\operatorname{tg}\angle SCO = \frac{OS}{OC} = \frac{5x}{4x\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{24}.$$

Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.



Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_2^2\left(-\log_2 x\right) + \log_2 \log_2^2 x \le 3, \\ -4\left|x^2 - 1\right| - 3 \ge \dfrac{1}{x^2 - 1}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Из условия следует, что $-\log_2 x>0$ и поэтому $\log_2\log_2^2 x=2\log_2\left(-\log_2 x\right)$. Пусть $\log_2(-\log_2 x)=z$. Решим неравенство:

$$z^2+2z\le 3;\quad (z-1)(z+3)\le 0;\quad -3\le z\le 1.$$

Обратная замена:

$$-3\le\log_2\left(-\log_2 x\right)\le 1;\quad \frac{1}{8}\le-\log_2 x\le 2;\quad -2\le\log_2 x\le-\frac{1}{8};\quad \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

Решим второе неравенство. Учитывая, что $0<x<1$, и, значит $x^2-1<0$, получаем:

$$4\left(x^2-1\right)-3\ge\frac{1}{x^2-1};\quad 4\left(x^2-1\right)^2-3\left(x^2-1\right)\le 1.$$

Сделаем замену $y=x^2-1$ и получим $4y^2-3y-1\le 0$, откуда, учитывая, что $y<0$, находим:

$$-\frac{1}{4}\le y<0;\ \frac{3}{4}\le x^2<1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\le x<1.$$

Чтобы найти решение системы, нужно сравнить границы полученных промежутков: $\frac{3^4}{2^8}=\frac{81}{256}<\frac{1}{2}$, поэтому $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$. Очевидно, $\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}<1$.

Решение системы: $\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB=12$, $CH=5$.

Решение.

а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K – на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE=\alpha$, то

$$\angle BEK=\angle BEH+\angle HEK=90^\circ+\alpha,\text{ а }\ \angle KAB=90^\circ-\alpha.$$

Значит, $\angle BEK+\angle KAB=90^\circ+\alpha+90^\circ-\alpha=180^\circ$. Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA}=\frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH}=\frac{AC}{AB},\ \text{откуда}\ CE=\frac{CH\cdot AC}{AB}.$$

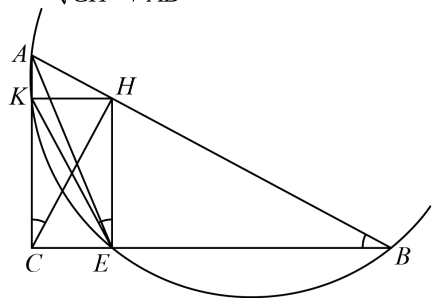
Тогда

$$AE=\sqrt{CE^2+AC^2}=AC\cdot\sqrt{\frac{CH^2+AB^2}{AB^2}}=\frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2+AB^2}$$

Поэтому $\sin\angle AEC=\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{\sqrt{CH^2+AB^2}}$.

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB:\frac{2AB}{\sqrt{CH^2+AB^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{CH^2+AB^2}=\frac{13}{2}.$$



Ответ: $\frac{13}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x-1)^2-2^{1-a}\right|+|x-1|+(1-x)^2+2^{a-1}=4+4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

<u>Решение</u>.
Пусть число x – решение данного уравнения при некотором значении параметра a. Тогда число $(2-x)$ есть его решение при том же значении a. Если решение единственно, то решения $(2-x)$ и x совпадают, то есть $(2-x)=x$; $x=1$. Подставив это решение в исходное уравнение, получим

$$2^{1-a}+2^{a-1}=4+4^a;\ \frac{2}{2^a}+\frac{2^a}{2}=4+4^a;\ \frac{1}{2^{a+1}}=1,\ \text{откуда } a=-1.$$

Пусть $a=-1$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\left|(x-1)^2-4\right|+|x-1|=4-(1-x)^2.$$

Отсюда следует, что $4-(1-x)^2\ge 0$, следовательно, $\left|(x-1)^2-4\right|=4-(1-x)^2$. Исходное уравнение принимает вид $|x-1|=0$, и оно имеет единственное решение $x=1$, удовлетворяющее условию $4-(1-x)^2\ge 0$. Следовательно, $a=-1$ удовлетворяет условию задачи.
Ответ: при $a=-1$ единственное решение $x=1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения найдено значение *a*. Доказано отсутствие других возможных значений *a*. Получено неверное значение *x* из-за вычислительной ошибки.	3
С помощью верного рассуждения найдено значение *a* и получено соответствующее значение *x*. Не обосновано отсутствие других решений.	2
Верно найдено значение *a*; возможно, имеются посторонние решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

<u>Решение</u>.
а) Да, могло. Например, если числа записаны в порядке 9, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 18, 17, 10.
б) Всего по кругу записано 10 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 10 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 10. Но такого быть не может, так как для данных чисел наибольший из всевозможных наибольших общих делителей есть НОД(18,9) = 9.
в) Числа 11, 13 и 17 являются простыми, наибольшие общие делители этих чисел со всеми остальными числами равняются 1. Каждое из чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих трёх будут иметь по крайней мере одного соседа, отличного от этих трёх чисел. Таким образом, хотя бы четыре из всех наибольших общих делителей будут равняться 1, то есть совпадать. Следовательно, не может быть больше, чем семь попарно различных наибольших общих делителей, поскольку всего их десять, причём четыре совпадают. Для расстановки 9, 18, 12, 16, 14, 13, 11, 17, 10, 15 получается ровно 7 попарно различных наибольших общих делителей.
Ответ: а) Да; б) нет; в) семь.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*.	4
Получены верные обоснованные ответы в двух пунктах из трёх.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б* или в пункте *в*.	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $16\cos^4 x-24\cos^2 x+9=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi;3\pi]$.

Решение.
а) Выделим полный квадрат:

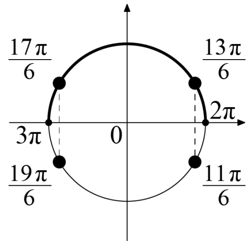
$$\left(4\cos^2 x-3\right)^2=0.$$

Преобразуем уравнение дальше:

$$4\cos^2 x=3;\quad \cos^2 x=\frac{3}{4};$$

$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[2\pi;3\pi]$. Получим $x=\frac{13\pi}{6}$, $x=\frac{17\pi}{6}$.



Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

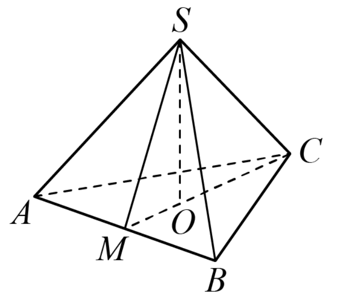
C2

Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

Решение.
Пусть $SO=4x$ и $SM=5x$. Тогда $OM=x\sqrt{25-16}=3x$, а $OC=2\cdot OM=6x$. Из треугольника COS находим

$$\operatorname{tg}\angle SCO=\frac{OS}{OC}=\frac{4x}{6x}=\frac{2}{3}.$$

Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.



Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{0,5}^2\left(-\log_3 x\right)-\log_{0,5}\log_3^2 x\le 3,\\ -8\left|x^2-1\right|-2\ge\dfrac{1}{x^2-1}.\end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Из условия следует, что $-\log_3 x > 0$ и поэтому $\log_{0,5}\log_3^2 x = -2\log_2\left(-\log_3 x\right)$. Пусть $\log_2(-\log_3 x) = z$. Решим неравенство:

$$z^2 + 2z \le 3;\quad (z-1)(z+3) \le 0;\quad -3 \le z \le 1.$$

Обратная замена:

$$-3 \le \log_2\left(-\log_3 x\right) \le 1;\quad \frac{1}{8} \le -\log_3 x \le 2;\quad -2 \le \log_3 x \le -\frac{1}{8};\quad \frac{1}{9} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}.$$

Решим второе неравенство. Учитывая, что $0 < x < 1$, и, значит $x^2 - 1 < 0$, получаем:

$$8\left(x^2-1\right) - 2 \ge \frac{1}{x^2-1};\quad 8\left(x^2-1\right)^2 - 2\left(x^2-1\right) \le 1.$$

Сделаем замену $y = x^2 - 1$ и получим: $8y^2 - 2y - 1 \le 0$, откуда, учитывая, что $y < 0$, находим: $-\frac{1}{4} \le y < 0$; $\frac{3}{4} \le x^2 < 1$; $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x < 1$.

Чтобы найти решение системы, нужно сравнить границы полученных промежутков: $\frac{3^4}{2^8} = \frac{81}{256} < \frac{1}{3}$, поэтому $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$. Очевидно, $\frac{1}{9} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[8]{3}} < 1$.

Решение системы: $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$, $CH = 7$.

Решение.

а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K – на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$, то $\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90° + \alpha$, а $\angle KAB = 90° - \alpha$.

Значит, $\angle BEK + \angle KAB = 90° + \alpha + 90° - \alpha = 180°$. Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике $180°$, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA} = \frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB},\ \text{откуда}\ CE = \frac{CH \cdot AC}{AB}.$$

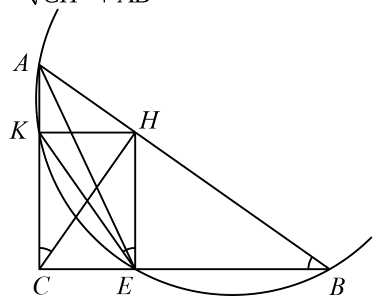
Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}$$

Поэтому $\sin\angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}$.

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB : \frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{17}{2}.$$



Ответ: $\frac{17}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\left|(x+1)^2-2^{-a-1}\right|+\left|x+1\right|+(1+x)^2+2^{a+1}=0,25+4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения *a*.

Решение.
Пусть число x – решение данного уравнения при некотором значении параметра *a*. Тогда число $(-2-x)$ есть его решение при том же значении *a*. Если решение единственно, то решения $(-2-x)$ и x совпадают, то есть $(-2-x)=x$; $x=-1$. Подставив это решение в исходное уравнение, получим:

$$2^{-a-1}+2^{a+1}=0,25+4^a;\ \frac{1}{2^{a+1}}+2^{a+1}=0,25+4^a;\ \frac{1}{2^{a+1}}=\frac{1}{4},\text{ откуда } a=1.$$

Пусть $a=1$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\left|(x+1)^2-0,25\right|+\left|x+1\right|=0,25-(1+x)^2.$$

Отсюда следует, что $0,25-(1+x)^2\ge 0$, следовательно,

$$\left|(x+1)^2-0,25\right|=0,25-(1+x)^2.$$

Исходное уравнение принимает вид $\left|x+1\right|=0$, и оно имеет единственное решение $x=-1$, удовлетворяющее условию $0,25-(1+x)^2\ge 0$.
Следовательно, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.
Ответ: при $a=1$ единственное решение $x=-1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения найдено значение *a*. Доказано отсутствие других возможных значений *a*. Получено неверное значение *x* из-за вычислительной ошибки.	3
С помощью верного рассуждения найдено значение *a* и получено соответствующее значение *x*. Не обосновано отсутствие других решений.	2
Верно найдено значение *a*; возможно, имеются посторонние решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Решение.
а) Да, могло. Например, если числа записаны в порядке 10, 21, 20, 19, 16, 15, 14, 11, 18, 13, 12, 17.
б) Всего по кругу записано 12 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 12 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 12. Но такого быть не может, так как для данных чисел наибольший из всевозможных наибольших общих делителей есть НОД(10,20) = 10.
в) Числа 11, 13, 17 и 19 являются простыми, наибольшие общие делители этих чисел со всеми остальными числами равняются 1. Каждое из чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих четырёх будут иметь по крайней мере одного соседа, отличного от этих четырёх чисел. Таким образом, хотя бы пять из всех наибольших общих делителей будут равняться 1, то есть совпадать. Следовательно, не может быть больше чем восемь попарно различных наибольших общих делителей, поскольку всего их двенадцать, причём пять совпадают. Для расстановки 10, 20, 19, 17, 13, 11, 18, 12, 16, 14, 21, 15 получается ровно 8 попарно различных наибольших общих делителей.
Ответ: а) Да; б) нет; в) восемь.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*.	4
Получены верные обоснованные ответы в двух пунктах из трёх.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б* или в пункте *в*.	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4